4.2.29 Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic III

Předpoklady: 040228

Př. 1: Připomeň si, jakým způsobem jsme řešili slovní úlohy na pohyby a společnou práci.

Společná práce: pomocí doby nutné k vykonání celého úkolu, jsme si vyjádřili vykonávané části úkolu. Všechny tyto části dají dohromady 1.

Úlohy na pohyb: Pomocí jedné z pohybových veličin (s, v, t) si popíšeme rovnicí celý pohyb. Postupným dosazováním pak dosáhneme, aby v rovnici byla pouze jedna neznámá. Rovnici vyřešíme.

Př. 2: Oběma přívody se bazének napustí za 36 minut. Po 30 minutách se jeden z přívodů ucpal a bazének se musel dopouštět pouze druhým přívodem, což trvalo ještě 15 minut. Za jak dlouho by se bazén napustil každým přívodem zvlášť?

První přívod ... p minut ... za 1 min ... $\frac{1}{p}$.

Druhý přívod ... d minut ... za 1 min ... $\frac{1}{d}$.

Oběma přívody se bazének napustí za 36 minut ... $\frac{36}{p}+\frac{36}{d}=1$.

Po 30 minutách společného napouštění se dopouštělo druhým ještě 15 minut ...

$$\frac{30}{p}+\frac{30}{d}+\frac{15}{d}=1.$$

Obě rovnice upravíme.

$\frac{36}{p}+\frac{36}{d}=1 \quad / \cdot pd$

$36d+36p=pd$

$\frac{30}{p}+\frac{30}{d}+\frac{15}{d}=1 \quad / \cdot pd$

$30d+30p+15p=pd$

$30d+45p=pd$

Obě rovnice obsahují člen pd, který překáží při vyjadřování $\Rightarrow$ rovnice odečteme.

$30d+45p=pd$

$36d+36p=pd$

$-6d+9p=0 \quad / :3$

$-2d+3p=0 \quad / +2d$

$3p=2d \quad / :2$

$d=\frac{3p}{2}$

Dosadíme do první rovnice.

$30\cdot\frac{3p}{2}+45p=p\frac{3p}{2}$

$45p + 45p = \frac{3p^2}{2} \quad / \cdot 2$

$180p = 3p^2 \quad / -180p$

$3p^2 - 180p = 0$

$3p(p-60) = 0$

Dvě řešení:

- $p = 0$ (nedává smysl a nevyhovuje podmínkám),
- $p = 60$, $d = \frac{3p}{2} = \frac{3 \cdot 60}{2} = 90$.

Prvním přívodem se bazének napustí za 60 minut, druhým za 90 minut.

Pedagogická poznámka: Elegantním zjednodušením příkladu je zapsání rovnice popisující druhé napouštění ve tvaru $15 \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{6}$ (bohužel to není můj nápad).

Př. 3: Pan ředitel v nebi seká pravidelně se sv. Pavlem hříšníky. Každý má svou sekačku a každý seká, jak mu zbude čas. Dávka hříšníků je stále stejná. Jednou společně sekali 2,5 hodiny, pak si musel sv. Pavel odskočit a tak pan ředitel zbytek hříšníků dosekal za půl hodiny. Jindy si musel po dvou hodinách odskočit na focení do Nebeského zpravodaje pan ředitel a sv. Pavel pak musel sekat ještě hodinu a 20 minut. Za jak dlouho by posekal hříšníky svojí sekačkou sv. Pavel? Za jak dlouho pan ředitel?

sv. Pavel ... p hodin ... za 1 hodinu ... $\frac{1}{p}$.

p. ředitel ... r hodin... za 1 hodinu ... $\frac{1}{r}$

společně sekali 2,5 hodiny, pak si musel sv. Pavel odskočit a tak pan ředitel zbytek hříšníků dosekal za půl hodiny ... $\frac{2,5}{p} + \frac{3}{r} = 1$

po dvou hodinách si odskočil na focení do Nebeského zpravodaje pan ředitel a sv. Pavel pak musel sekat ještě hodinu a 20 minut ... $\frac{2}{r} + \frac{2}{p} + \frac{4}{3p} = 1$

Obě rovnice upravíme.

$\frac{2,5}{p} + \frac{3}{r} = 1 \quad / \cdot 2pr$

$5r + 6p = 2pr$

$\frac{2}{r} + \frac{2}{p} + \frac{4}{3p} = 1 \quad / \cdot 3pr$

$6p + 6r + 4r = 3pr$

$6p + 10r = 3pr$

Obě rovnice obsahují člen pr, který překáží při vyjadřování $\Rightarrow$ rovnice vhodně vynásobíme a odečteme.

$6p + 5r = 2pr \quad / \cdot 3$

$6p + 10r = 3pr \quad / \cdot 2$

$$18p+15r=6pr$$
$$12p+20r=6pr$$
$$6p-5r=0 \quad / -5r$$
$$6p=5r \quad / : 5$$
$$r=\frac{6p}{5}$$
Dosadíme do první rovnice.
$$6p+5\cdot\frac{6p}{5}=2p\frac{6p}{5}$$
$$12p=\frac{12p^2}{5} \quad / \cdot\frac{5}{12}$$
$$5p=p^2 \quad / -5p$$
$$p^2-5p=p(p-5)=0$$
Dvě řešení:

- $p=0$ (nedává smysl a nevyhovuje podmínkám),
- $p=5$, $r=\frac{6p}{5}=\frac{6\cdot 5}{5}=6$.

Sv. Pavel by hříšníky posekal za 5 hodin, pan ředitel za 6 hodin.

Př. 4: Bazén o objemu $750\ \mathrm{m}^3$ se napouští pomocí dvou přítoků. Při posledním napouštění, však byly oba otevřeny pouze 4 hodiny. Kvůli poruše na čerpadlu musel být větší přívod uzavřen a bazén se dopouštěl pouze menším přítokem dalších 25 hodin. Kolik m^3 vody nateče každým z přítoků za hodinu, jestliže větším přítokem nateče za hodinu o $6\ \mathrm{m}^3$ vody více?

Větší přítok za 1 hodinu ... $v\ \mathrm{m}^3$
Menší přítok za 1 hodinu ... $m\ \mathrm{m}^3$

Větším přítokem nateče za hodinu o $6\ \mathrm{m}^3$ vody více ... $v=m+6$
Oba přívody 4 hodiny, pak menší 25 hodin pro napuštění ... $4v+29m=750$

Z první rovnice dosadíme do druhé: $4(m+6)+29m=750$
$$4m+24+29m=750 \quad / -26$$
$$33m=726 \quad / : 33$$
$$m=22$$
Dopočteme druhou neznámou: $v=m+6=22+6=28$.

Větším přítokem nateče za hodinu $28\ \mathrm{m}^3$, menším $22\ \mathrm{m}^3$.

Př. 5: Dva šílení trenéři honí své týmy stálou rychlostí okolo 400 m dlouhého atletického oválu. Pokud týmy běží stejným směrem, potkají se jednou za 800 sekund, pokud běží proti sobě, potkají se každých 80 s. Urči rychlosti, kterými se oba nebohé týmy musí pohybovat.

rychlejší tým ... r m/s
pomalejší tým ... p m/s

Běží proti sobě, potkají se za 80 s $\Rightarrow$ dráha, kterou urazí za 80 s, dohromady odpovídá jednomu okruhu ... $80r + 80p = 400$.
Běží stejným směrem, potkají se za 800 s $\Rightarrow$ rozdíl v drahách za 800 s se rovná jednomu okruhu ... $800r - 800p = 400$

Upravíme obě rovnice.

$80r + 80p = 400 \quad / : 40$

$2r + 2p = 10 \quad / : 2$

$r + p = 5$

$800r - 800p = 400 \quad / : 400$

$2r - 2p = 1$

Z první rovnice vyjádříme a dosadíme do druhé.
$r = 5 - p$
Dosadíme.
$2(5 - p) - 2p = 1$
$10 - 2p - 2p = 1 \quad / -1 + 4p$
$9 = 4p \quad / : 4$
$p = 2,25$
Dopočteme *r*: $r = 5 - p = 5 - 2,25 = 2,75$.

Pomalejší tým musí běhat rychlostí 2,25 m/s, rychlejší 2,75 m/s.

Př. 6: Alois navštěvuje svou lásku na kole. Při cestě za ní, ho žene spalující touha a proto jede rychlostí o 3 km/h větší než obvykle na kole jezdí a cestu tak zvládne o 24 minut dříve. Při zpáteční cestě ho naopak chmury z tíživého odloučení zpomalují a tak kvůli rychlosti o 3 km/h nižší než obvykle je cesta o 36 minut delší. Jakou rychlostí se Alois obvykle na kole pohybuje? Jak daleko jezdí za svou láskou?

Při obou cestách porovnáváme Aloisův pohyb s jeho pohybem standardní rychlostí $\Rightarrow$ jako proměnné použijeme:

- *v*: normální rychlost jízdy na kole,
- *t*: čas, za který by Alois dorazil ke své lásce normální rychlostí.

jede rychlostí o 3 km/h větší než obvykle na kole jezdí a cestu tak zvládne o 24 minut rychleji
$s_n = s_r$ (jak při normálním, tak při zrychleném pohybu by urazil stejnou vzdálenost)
$vt = v_r t_r$
$vt = (v+3)\left(t - \frac{24}{60}\right)$ jede rychlostí o 3 km/h větší a vše zvládne o 24 minut rychleji

kvůli rychlosti o 3 km/h nižší než obvyklé je cesta o 36 minut delší
$s_n = s_p$ (jak při normálním, tak při pomaleném pohybu by urazil stejnou vzdálenost)

$vt = v_p t_p$

$vt = (v-3)\left(t+\frac{36}{60}\right)$ jede rychlostí o 3 km/h větší a vše zvládne o 24 minut rychleji

Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\Rightarrow$ manuální problém.
Obě rovnice nejdříve upravíme.

$vt = (v+3)\left(t-\frac{2}{5}\right)$

$vt = vt - \frac{2}{5}v + 3x - \frac{6}{5} \quad / -vt \; / \cdot 5$

$-2v + 15t - 6 = 0$

$vt = (v-3)\left(t+\frac{3}{5}\right)$

$vt = vt + \frac{3}{5}v - 3t - \frac{9}{6} \quad / -vt \;\; / \cdot 5$

$3v - 15t - 9 = 0$

Soustava je připravena na sčítací metodu:

$$\begin{array}{l} 3v - 15t - 9 = 0 \\ \underline{-2v + 15t - 6 = 0} \\ v - 15 = 0 \end{array}$$

$v = 15$ km/h

Dopočteme čas a vzdálenost:

$-2v + 15t - 6 = \quad / + 2v + 6$

$15t = 6 + 2v = 6 + 2 \cdot 15 = 36 \quad / : 15$

$t = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} = 2$ h 24 min

Vzdálenost k lásce: $s = vt = 15 \cdot \frac{12}{5}$ km $= 36$ km

Alois jezdí na kole normálně rychlostí 15 km/h. Cesta k jeho lásce je dlouhá 36 km.

Př. 7: Filip je mistr ČR v pití coly více brčky najednou. Ve víceboji načas dosáhl českého rekordu při pití 3 malými a 5 velkými brčky, když v limitu vypil 254 ml coly. Stejné tempo udržel i v královské disciplíně 4 malé, 4 velké, čímž dosáhl skvělých 240 vypitých ml. Jaké množství coly vypije během limitu jedním malým brčkem? Jaké množství vypije za stejnou dobu velkým brčkem?

Množství coly (v ml), které dokáže vypít v limitu jedním malým brčkem … m
Množství coly (v ml), které dokáže vypít v limitu jedním velkým brčkem … v

3 malými a 5 velkými brčky, když v limitu vypil 254 ml coly: $3m + 5v = 254$
4 malé, 4 velké, čímž dosáhl skvělých 240 vypitých ml: $4m + 4v = 240$

Soustava rovnic:

$$\begin{array}{l} 3m + 5v = 254 \\ \underline{4m + 4v = 240 \quad / : 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3m + 5v = 254 \\ m + v = 60 \end{array} \Rightarrow m = 60 - v$$

Dosadíme do první rovnice: $3(60 - v) + 5v = 254$

$180 - 3v + 5v = 254 \quad / -180$

$2v = 74 \quad / : 2$

$v = 37$

Dopočteme m: $m = 60 - 37 = 23$

Filip vypije velkým brčkem v limitu 37 ml coly, malým 23 ml coly.

Př. 8: Druhým typem soutěží v pití brčkem je rychlostní vypití daného množství do dna. V základní disciplíně 4 velká, 3 malá vypil daný objem coly za 12,5 sekundy. V rychlostním pití 6 velkých, 5 malých mu stačilo jen 8 s. Za jak dlouho by Filip vypil celý objem velkým brčkem? Za jak dlouho malým?

Celý objem velkým brčkem … v sekund $\Rightarrow$ za 1sekundu … $\frac{1}{v}$ objemu

Celý objem malým brčkem … m sekund $\Rightarrow$ za 1sekundu … $\frac{1}{m}$ objemu

4 velká, 3 malá vypil daný objem coly za 12,5 sekundy: $12{,}5\cdot\left(\frac{4}{v}+\frac{3}{m}\right)=1$

6 velkých, 5 malých mu stačilo jen 8 s: $8\cdot\left(\frac{6}{v}+\frac{5}{m}\right)=1$

Upravíme obě rovnice:

$$12{,}5\cdot\left(\frac{4}{v}+\frac{3}{m}\right)=1 \quad /\cdot 2$$

$$25\cdot\left(\frac{4}{v}+\frac{3}{m}\right)=2$$

$$\frac{100}{v}+\frac{75}{m}=2 \quad /\cdot vm$$

$$100m+75v=2vm$$

$$8\cdot\left(\frac{6}{v}+\frac{5}{m}\right)=1$$

$$\frac{48}{v}+\frac{40}{m}=1 \quad /\cdot vm$$

$$48m+40v=vm$$

$$\begin{aligned}100m+75v&=2vm\\ 48m+40v&=vm \quad /\cdot 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}100m+75v&=2vm\\ 96m+80v&=2vm\end{aligned}$$

Rovnice odečteme

$$4m-5v=0 \quad /+5v$$

$$4m=5v \quad /:4$$

$$m=\frac{5}{4}v$$

Dosadíme do první rovnice

$$100\cdot\frac{5}{4}v+75v=2v\cdot\frac{5}{4}v$$

$$125v+75v=\frac{5v^2}{2}$$

$$200v=\frac{5v^2}{2} \quad /\cdot 2$$

$$200v=\frac{5v^2}{2} \quad /\cdot 2$$

$$400v=5v^2 \quad /:5$$

$v^2 - 80v = 0$
$v(v-80) = 0$
Dvě řešení:

- $v_1 = 0 \Rightarrow$ nemá reálný význam (není možné vypít daný nenulový objem za 0 s),
- $v_2 = 80 \Rightarrow m = \frac{5}{4}v = \frac{5}{4} \cdot 80 = 100$

Filip by velkým brčkem vypil daný objem coly za 80 s, malým za 100 s.

Př. 9: Při štafetové hře vybíhají zástupci obou týmů proti sobě. Vzdálenost obou týmů od sebe je 66 m. Jana s Mirkou první závodnice obou týmů proti sobě vyrazily v jednom okamžiku a potkali se po 6 sekundách. Během prvního kola získal Janin tým náskok a Jana tak vyběhla do druhého kola o 1,1 sekundy dříve, přesto se s Mirkou potkali přesně uprostřed mezi oběma týmy. Která z dívek běží rychleji? Urči jejich rychlosti za předpokladu, že každá z nich běžela v obou kolech stejně rychle a přibližně rovnoměrně.

Rychleji běží Mirka, protože Janin tým měl náskok, Jana vyběhla dřív a přesto se potkaly uprostřed (každá z nich uběhla polovinu vzdálenosti, ale Mirka za kratší čas).

rychlost Jany … v_J
rychlost Mirky … v_M

Jana s Mirkou první závodnice obou týmů proti sobě vyrazily v jednom okamžiku a potkali se po 6 sekundách $\Rightarrow$ dráhy, které uběhly se dohromady rovnají 66 m
$v_J \cdot 6 + v_M \cdot 6 = 66 \quad / : 6$
$v_J + v_M = 11$
Jana tak vyběhla do druhého kola o 1,1 sekundy dříve, přesto se s Mirkou potkali přesně uprostřed mezi oběma týmy $\Rightarrow$ obě uběhly 33 m, Jana běžela o 1,1 sekundy déle, dobu, po kterou běžely neznáme
$v_M \cdot t = 33$
$v_J \cdot (t + 1{,}1) = 33$
Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých, řešíme postupným dosazováním, nejdříve se zbavíme *t*:
$v_M \cdot t = 33 \Rightarrow t = \frac{33}{v_M}$
$v_J \cdot (t + 1{,}1) = v_J \cdot \left(\frac{33}{v_M} + 1{,}1 \right) = 33$

Zbývají dvě rovnice:
$$v_J + v_M = 11$$
$$v_J \cdot \left(\frac{33}{v_M} + 1{,}1 \right) = 33$$
Z první rovnice vyjádříme v_J a dosadíme do druhé: $v_J = 11 - v_M$

$(11-v_M)\cdot\left(\frac{33}{v_M}+1{,}1\right)=33$

Zrušíme index a dál řešíme jako jednu rovnici:

$(11-v)\cdot\left(\frac{33}{v}+1{,}1\right)=33$

$\frac{11\cdot 33}{v}+11\cdot 1{,}1-33-1{,}1v=33$

Protože platí $33=1{,}1\cdot 30$, upravíme všechny tak, aby obsahovaly číslo 1,1, kterým pak rovnici vydělíme.

$\frac{1{,}1\cdot 330}{v}+11\cdot 1{,}1-1{,}1\cdot 30-1{,}1v=1{,}1\cdot 30 \quad /1{,}1$

$\frac{330}{v}+11-30-v=30 \quad /+30-11$

$\frac{330}{v}+11-30-v=49 \quad /\cdot v$

$330-v^2=49v \quad /+v^2-330$

$v^2+49v-330=0$

Dosadíme do vzorce pro kvadratickou rovnici:

$$v_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-49\pm\sqrt{49^2-4\cdot 1\cdot(-330)}}{2\cdot 1}=\frac{-49\pm\sqrt{3721}}{2}=\frac{-49\pm 61}{2}$$

$v_1=\frac{-49-61}{2}=\frac{-110}{2}=-55$ $\qquad$ $v_2=\frac{-49+61}{2}=\frac{12}{2}=6$

$v_M-6 \Rightarrow v_J=11-v_M=11-6=5$

Mirka běžela rychlostí $6\ \text{m/s}$, Jana rychlostí $5\ \text{m/s}$.

Př. 10: Výletní loď pluje první část své plavby proti proudu řeky rychlostí 10 km/h. Během dnešní plavby, kterou chtěl kapitán stihnout rychleji, loď vyrazila rychlostí 12 km/h, stroje však zatížení nevydržely, přehřály se a zbytek plavby proti proudu loď plula sníženou rychlostí 9 km/h. Přesto dorazila díky náskoku z první části tratě přesně podle jízdního řádu. Během zpáteční cesty po proudu řeky parník dodržel normální cestovní rychlost 15 km/h a jeden z cestujících změřil, že i v tomto případě parník urazil část trasy, kterou jel pomaleji, za delší dobu a to o 12 minut. Jak dlouhou vzdálenost jel při cestě proti proudu parník rychlostí 12 km/h? Jak dlouho vzdálenost rychlostí 9 km/h?

Rovnice pro část plavby proti proudu: Parník dorazil přesně podle jízdního řádu $\Rightarrow$ doby rychlejšího a pomalejšího pohybu musí dát dohromady celkovou dobu jízdy proti proudu.

$t_r+t_p=t$

Dosadíme za časy pomocí vzorce $t=\frac{s}{v}$.

$\frac{s_r}{12}+\frac{s_p}{9}=\frac{s_r+s_p}{10}$

Rovnice pro část plavby po proudu: i v tomto případě parník urazil část trasy, kterou jel pomaleji, za delší dobu a to o 12 minut.

$$t_p = t_r + \frac{12}{60} = t_r + \frac{1}{5}$$

Dosadíme za časy pomocí vzorce $t = \frac{s}{v}$.

$$\frac{s_p}{15} = \frac{s_r}{15} + \frac{1}{5}$$

Obě rovnice vynásobíme a upravíme:

$$\frac{s_r}{12} + \frac{s_p}{9} = \frac{s_r + s_p}{10} \qquad / \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5$$

$$15 \cdot s_r + 20 s_p = 18\left(s_r + s_p\right)$$

$$15 s_r + 20 s_p = 18 s_r + 18 s_p \qquad / -15 s_r - 18 s_p$$

$$2 s_p = 3 s_r$$

$$\frac{s_p}{15} = \frac{s_r}{15} + \frac{1}{5} \qquad / \cdot 15$$

$$s_p = s_r + 3$$

Dosadíme: $2\left(s_r + 3\right) = 3 s_r$

$$2 s_r + 6 = 3 s_r$$

$$s_r = 6$$

$$s_p = s_r + 3 = 6 + 3 = 9$$

Parník jel při cestě proti proudu 6 km rychlostí 12 km/h a 9 km rychlostí 9 km/h.

Shrnutí: